# Résolution de l'équation de la chaleur avec les transformées de Fourier

Yann-Edwin Keta

## 1 Équation de la chaleur

Avant de résoudre ladite équation de la chaleur (EDC), déjà faut-il savoir à quoi elle correspond. Nous passerons les approximations nécessaires et les justifications physiques, mais nous n'allons pas nous priver du plaisir d'explorer un peu de thermodynamique.

La 1e équation dont nous avons besoin est la conservation de l'énergie (1e loi de la thermodynamique) qui lie la variation temporelle de la température en tout point de l'espace et en tout temps $T(\vec{r}, t)$ au flux thermique surfacique $\vec{j}_{th}(\vec{r}, t)$ et à la source volumique d'énergie $\sigma_s(\vec{r}, t)$

$$\rho c \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{th}(\vec{r}, t) + \sigma_s(\vec{r}, t) \tag{1}$$

où $\rho > 0$ est la masse volumique du milieu et $c > 0$ sa capacité thermique massique. La seconde est la loi de Fourier qui établit une relation de proportionnalité entre le flux thermique et le gradient de température

$$\vec{j}_{th}(\vec{r}, t) = -\lambda \vec{\nabla} T(\vec{r}, t) \tag{2}$$

où $\lambda > 0$ est la conductivité thermique du milieu. Cette relation indique que le transfert thermique s'effectue des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides.

Ainsi, en insérant 2 dans 1, et en notant $D_{th} = \lambda / \rho c$, on obtient l'EDC

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} T(\vec{r}, t) = D_{th} \vec{\nabla}^2 T(\vec{r}, t) + \frac{1}{\rho c} \sigma_s(\vec{r}, t)} \tag{3}$$

où $D_{th}$ est la diffusivité thermique.

Cette équation est une équation de diffusion : il s'agit du même phénomène que la diffusion de particules. Une équation identique est démontrée pour la densité de particules en utilisant la conservation de la masse en lieu et place de 1 et la loi de Fick qui est analogue à 2.

## 2 Transformée de Fourier

Dans cette section nous introduisons brièvement les outils et résultats utiles à la résolution.

## 2.1 Convention

Nous utiliserons dans la suite de ce document la convention suivante pour les transformées de Fourier (TF) et transformées de Fourier inverse (TFI). D'autres conventions existent, cependant la convention choisie n'importe pas pour la résolution conduite dans , donc pas d'inquiétude.

Soit $f(\vec{r}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, sa transformée de Fourier $\hat{f}(\vec{k}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est obtenue par

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{r}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{r}) \tag{4}$$

et inversement

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{f}(\vec{k}) \tag{5}$$

La fonction $f$ doit bien évidemment satisfaire certaines conditions afin de pouvoir l'intégrer d'une telle manière sur $\mathbb{R}^d$, nous ne les détaillerons pas ici – essentiellement parce que jamais rien n'est vérifié en Physique.

On dénotera $\mathcal{F}$ l'opérateur de la transformée de Fourier tel que

$$\mathcal{F}\{f\} = \hat{f} \Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} = f \tag{6}$$

## 2.2 Théorème de la convolution

Nous utiliserons le théorème de la convolution. Celui-ci s'énonce simplement pour deux fonction $f$ et $g$

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\} \tag{7}$$

et nous en utiliserons le corollaire suivant

$$\mathcal{F}^{-1}\{f \cdot g\} = \mathcal{F}^{-1}\{f\} * \mathcal{F}^{-1}\{g\} \tag{8}$$

## 2.3 Transformée de Fourier inverse d'une gaussienne

Nous aurons aussi besoin de la transformée inverse d'une fonction gaussienne

$$f(\vec{k} \in \mathbb{R}^d) = e^{-A\vec{k}^2},\ A > 0 \tag{9}$$

définie par

$$f(\vec{r} \in \mathbb{R}^d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-A\vec{k}^2} \tag{10}$$

que nous allons calculer en s'inspirant d'une démonstration trouvée sur Stack Exchange.

Avec $\vec{r} = (r_l)_{l\in[\![1;d]\!]}$ et $\vec{k} = (k_l)_{l\in[\![1;d]\!]}$ la décomposition de $\vec{r}$ et $\vec{k}$ dans des bases orthogonales, prenons pour $l \in [\![1;d]\!]$ la dérivée de 10 par rapport à $r_l$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr_l} f(\vec{r}) &= \frac{d}{dr_l}\left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\; e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-A\vec{k}^2}\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\; \frac{\partial}{\partial r_l} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-A\vec{k}^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\; ik_l e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-A\vec{k}^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\; e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left(\frac{-i}{2A}\right) \frac{\partial}{\partial k_l} e^{-A\vec{k}^2} \\
&= -\frac{i}{2A} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{m\neq l} dk_m\; e^{ik_m r_m} e^{-Ak_m^2} \int_{\mathbb{R}} dk_l\; e^{ik_l r_l} \frac{\partial}{\partial k_l} e^{-Ak_l^2}
\end{aligned}$$

où nous pouvons intégrer le dernier facteur par partie

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} dk_l\; e^{ik_l r_l} \frac{\partial}{\partial k_l} e^{-Ak_l^2} &= \cancelto{0}{\left[e^{ik_l r_l} e^{-Ak_l^2}\right]_{k_l=-\infty}^{k_l=+\infty}} - \int_{\mathbb{R}} dk_l\; \frac{\partial}{\partial k_l} e^{ik_l r_l} e^{-Ak_l^2} \\
&= -ir_l \int_{\mathbb{R}} dk_l\; e^{ik_l r_l} e^{-Ak_l^2}
\end{aligned}$$

qui donne alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr_l} f(\vec{r}) &= -\frac{i}{2A} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{m\neq l} dk_m\; e^{ik_m r_m} e^{-Ak_m^2} (-ir_l) \int_{\mathbb{R}} dk_l\; e^{ik_l r_l} e^{-Ak_l^2} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{r_l}{2A} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\; e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-A\vec{k}^2} \\
&= -\frac{r_l}{2A} f(\vec{r})
\end{aligned}$$

ce qui est valable pour tout $l \in [\![1;d]\!]$. Nous obtenons donc

$$f(\vec{r}) = f(\vec{r} = \vec{0}) e^{-\vec{r}^2/4A}$$

où, avec le résultat connu sur l'intégration d'une fonction gaussienne,

$$f(\vec{r} = \vec{0}) = \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\; e^{-A\vec{k}^2} = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{d/2}$$

nous obtenons finalement

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\; e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-A\vec{k}^2} = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{d/2} e^{-\vec{r}^2/4A} \tag{11}$$

# 3 Résolution

## 3.1 Conditions limites

La résolution que nous allons mener nécessite certaines conditions aux limites. Malheureusement, celles-ci impliquent que cette méthode ne permet de résoudre l'EDC dans toutes les situations...

Nous allons considérer que :

**(i)** $\forall t \in \mathbb{R},\ \lim_{|\vec{r}|\to+\infty} \vec{\nabla} T(\vec{r},t) = \vec{0}$

**(ii)** $\forall t \in \mathbb{R},\ \lim_{|\vec{r}|\to+\infty} T(\vec{r},t) = 0$

## 3.2 Principe

Le but de la résolution est de déterminer pour un profil de température initial $T(\vec{r}, t=0)$ et une source d'énergie $\sigma(\vec{r}, t)$ supposés connus, le profil d'énergie en tout temps $t$ et tout point de l'espace $x$, $T(\vec{r}, t)$.

La résolution est simple et se fait en 3 temps :

**(i)** Passage de l'EDC dans l'espace de Fourier.

**(ii)** Résolution de l'équation différentielle partielle en temps.

**(iii)** Retour dans l'espace réel.

## 3.3 $d = 1$

Nous allons commencer par le cas le plus simple qui correspond au cas d'un espace unidimensionnel ($d = 1$), on dénotera $x$ la variable spatiale. L'équation 3 devient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = D_{th} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) + \frac{1}{\rho c} \sigma_s(x,t) \tag{12}$$

### 3.3.1 Passage de l'EDC dans l'espace de Fourier

On commence donc par appliquer ($\mathcal{F} : \bullet \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{R}} dx\, e^{-ikx} \bullet$) à l'équation 12

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-ikx} \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = D_{th} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-ikx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) + \frac{1}{\rho c} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-ikx} \sigma_s(x,t)}_{\hat{\sigma}(\vec{k},t)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Big( \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-ikx} T(x,t)}_{\hat{T}(k,t)} \Big) = D_{th} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-ikx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t)}_{1} + \frac{1}{\rho c} \hat{\sigma}(k,t)$$

Le terme 1 doit être intégré par partie

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-ikx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cancelto{0 \text{ (cf. 3.1)}}{\left[ e^{-ikx} \frac{\partial}{\partial x} T(x,t) \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx\, (-ik) e^{-ikx} \frac{\partial}{\partial x} T(x,t) \\
&= ik \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \cancelto{0 \text{ (cf. 3.1)}}{\left[ e^{-ikx} T(x,t) \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}} - \int_{\mathbb{R}} dx\, (-ik) e^{-ikx} T(x,t) \right) \\
&= -k^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-ikx} T(x,t) \\
&= -k^2 \hat{T}(k,t)
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'équation suivante pour la TF de la température

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{T}(k,t) = -D_{th} k^2 \hat{T}(k,t) + \frac{1}{\rho c} \hat{\sigma}(k,t) \tag{13}$$

qui est une équation différentielle partielle du 1e ordre en temps.

### 3.3.2 Résolution de l'équation différentielle partielle en temps

On peut déjà résoudre l'équation homogène associée à 13 qui est simplement l'équation de la chaleur sans terme source

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{T}(k,t) = -D_{th}k^2\hat{T}(k,t) \tag{14}$$

qui admet pour solution

$$\hat{T}_0(k,t) = \hat{T}(k,t=0)e^{-D_{th}k^2t} \tag{15}$$

Sans connaissance de la forme du terme source $\sigma_s(x,t)$, nous allons utiliser la méthode de variation de la constante. Soit $A$ telle que $\hat{T}(k,t) = A(t)\hat{T}_0(k,t)$ et $A(t=0)=1$, on suppose que $\hat{T}(k,t)$ est solution de 13, ainsi

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\hat{T}(k,t) = -D_{th}k^2\hat{T}(k,t) + \frac{1}{\rho c}\hat{\sigma}(k,t)\\
\Leftrightarrow &\frac{\partial}{\partial t}\left(A(t)\hat{T}_0(k,t)\right) = -D_{th}k^2A(t)\hat{T}_0(k,t) + \frac{1}{\rho c}\hat{\sigma}(k,t)\\
\Leftrightarrow &\hat{T}_0(k,t)\frac{\partial}{\partial t}A(t) + \underbrace{\cancel{A(t)\frac{\partial}{\partial t}\hat{T}_0(k,t)}}_{-D_{th}k^2A(t)\hat{T}_0(k,t)\text{ (cf. 14)}} = \cancel{-D_{th}k^2A(t)\hat{T}_0(k,t)} + \frac{1}{\rho c}\hat{\sigma}(k,t)\\
\Leftrightarrow &\frac{\partial}{\partial t}A(t) = \frac{1}{\hat{T}_0(k,t)}\frac{1}{\rho c}\hat{\sigma}(k,t) = \frac{1}{\hat{T}(k,t=0)}\frac{1}{\rho c}\hat{\sigma}(k,t)e^{D_{th}k^2t}
\end{aligned}$$

dont nous prenons la solution suivante

$$A(t) = 1 + \frac{1}{\hat{T}(k,t=0)}\frac{1}{\rho c}\int_{t'=0}^{t'=t} dt'\ \hat{\sigma}(k,t')e^{D_{th}k^2t'}$$

d'où

$$\hat{T}(k,t) = A(t)\hat{T}_0(k,t) = \left(1 + \frac{1}{\hat{T}(k,t=0)}\frac{1}{\rho c}\int_{t'=0}^{t'=t} dt'\ \hat{\sigma}(k,t')e^{D_{th}k^2t'}\right)\hat{T}(k,t=0)e^{-D_{th}k^2t}$$

c'est-à-dire

$$\hat{T}(k,t) = \hat{T}(k,t=0)e^{-D_{th}k^2t} + \frac{1}{\rho c}\int_{t'=0}^{t'=t} dt'\ \hat{\sigma}(k,t')e^{-D_{th}k^2(t-t')} \tag{16}$$

### 3.3.3 Retour dans l'espace réel

Nous avons déterminé une solution de l'EDC dans l'espace de Fourier (équation 16), il convient donc désormais de prendre la transformée inverse de cette solution

$$\begin{aligned}
T(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} dk\ e^{ikx}\hat{T}(k,t)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} dk\ e^{ikx}\hat{T}(k,t=0)e^{-D_{th}k^2t} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} dk\ e^{ikx}\frac{1}{\rho c}\int_{t'=0}^{t'=t} dt'\ \hat{\sigma}(k,t')e^{-D_{th}k^2(t-t')}\\
&= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} dk\ e^{ikx}\hat{T}(k,t=0)e^{-D_{th}k^2t}}_{1} + \frac{1}{\rho c}\int_{t'=0}^{t'=t} dt'\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} dk\ e^{ikx}\hat{\sigma}(k,t')e^{-D_{th}k^2(t-t')}}_{2}
\end{aligned}$$

Les intégrales (1) et (2) correspondent à des transformées de Fourier inverses de produits de fonctions, nous utiliserons donc le corrolaire du théorème de la convolution que nous avons introduit (équation 8) afin d'écrire pour (1)

$$\begin{aligned}
(1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk\; e^{ikx} \hat{T}(k, t=0) e^{-D_{th} k^2 t} && \equiv \mathcal{F}^{-1}\{f \cdot g\} \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx' \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk\; e^{ik(x-x')} \hat{T}(k, t=0) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk\; e^{ikx'} e^{-D_{th} k^2 t} \right) && \equiv \mathcal{F}^{-1}\{f\} * \mathcal{F}^{-1}\{g\} \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx' T(x-x', t=0) \sqrt{\frac{\pi}{D_{th} t}} e^{-x'^2/4D_{th}t}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'équation 5 et l'équation 11 pour le premier et le second facteur respectivement. De même pour (2)

$$\begin{aligned}
(2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk\; e^{ikx} \hat{\sigma}(k, t') e^{-D_{th} k^2 (t-t')} && \equiv \mathcal{F}^{-1}\{f \cdot g\} \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx' \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk\; e^{ik(x-x')} \hat{\sigma}(k, t') \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk\; e^{ikx'} e^{-D_{th} k^2 (t-t')} \right) && \equiv \mathcal{F}^{-1}\{f\} * \mathcal{F}^{-1}\{g\} \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx'\; \sigma(x-x', t') \sqrt{\frac{\pi}{D_{th}(t-t')}} e^{-x'^2/4D_{th}(t-t')}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'équation 5 et l'équation 11 pour le premier et le second facteur respectivement.

Nous obtenons alors finalement l'expression suivante pour notre solution de l'EDC unidimensionnelle

$$\begin{aligned}
T(x,t) = &\int_{\mathbb{R}} dx'\; T(x-x', t=0) \sqrt{\frac{\pi}{D_{th} t}} e^{-x'^2/4D_{th}t} \\
&+ \frac{1}{\rho c} \int_{t'=0}^{t'=t} dt' \int_{\mathbb{R}} dx'\; \sigma(x-x', t') \sqrt{\frac{\pi}{D_{th}(t-t')}} e^{-x'^2/4D_{th}(t-t')}
\end{aligned} \tag{17}$$

qui ne dépend que du profil de température initial $T(x, t=0)$ et de l'apport d'énergie $\sigma(x,t)$.

## 3.4 $d \in \mathbb{N}^*$

De manière plus succincte, nous allons maintenant aborder le cas d'une dimension quelconque. La résolution n'est pas si différente que le cas $d = 1$, cependant certains passages nécessitent un peu de soin dans la démonstration.

### 3.4.1 Passage de l'EDC dans l'espace de Fourier

On commence par appliquer ($\mathcal{F} : \bullet \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathcal{R}} dx\ e^{-ikx} \bullet$) à l'équation 3

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{r}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{r}, t) =& D_{th} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathcal{R}^d} d^d\vec{r}\ {}^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{\nabla}^2 T(\vec{r}, t) \\
&+ \frac{1}{\rho c} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^{d/2}} d\vec{r}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \sigma_s(\vec{r}, t)}_{\hat{\sigma}(\vec{k}, t)}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left( \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{r}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} T(\vec{r}, t) \right)}_{\hat{T}(\vec{k}, t)} = D_{th} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{r}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{\nabla}^2 T(\vec{r}, t)}_{1} + \frac{1}{\rho c} \hat{\sigma}(\vec{k}, t)$$

Le terme 1 doit être intégré par partie

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{r}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\ \vec{\nabla}^2 T(\vec{r}, t) \\
=& \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_l \left( dr_l\ e^{-ik_l r_l} \right) \sum_l \frac{\partial^2}{\partial r_l^2} T(r_1, \ldots, r_d, t) \\
=& \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_l \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{m \neq l} \left( dr_m\ e^{-ik_m r_m} \right) \int_{\mathbb{R}} dr_l\ e^{-ik_l r_l} \frac{\partial^2}{\partial r_l^2} T(r_1, \ldots, r_d, t) \\
=& \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_l \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{m \neq l} \left( dr_m\ e^{-ik_m r_m} \right) \Bigg( \underbrace{\left[ e^{-ik_l r_l} \frac{\partial}{\partial r_l} T(r_1, \ldots, r_d, t) \right]_{r_l=-\infty}^{r_l=+\infty}}_{0 \text{ (cf. 3.1)}} \\
&- \int_{\mathbb{R}} dr_l\ (-ik_l) e^{-ik_l r_l} \frac{\partial}{\partial r_l} T(r_1, \ldots, r_l, t) \Bigg) \\
=& \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_l ik_l \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{m \neq l} \left( dr_m\ e^{-ik_m r_m} \right) \Bigg( \underbrace{\left[ e^{-ik_l r_l} T(r_1, \ldots, r_d, t) \right]_{r_l=-\infty}^{r_l=+\infty}}_{0 \text{ (cf. 3.1)}} \\
&- \int_{\mathbb{R}} dr_l\ (-ik_l) e^{-ik_l r_l} T(r_1, \ldots, r_d, t) \Bigg) \\
=& \left( \sum_l -k_l^2 \right) \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}} d^d\vec{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\ T(\vec{r}, t) \\
=& -\vec{k}^2 \hat{T}(\vec{r}, t)
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'équation suivante pour la TF de la température

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{T}(\vec{k}, t) = -D_{th} \vec{k}^2 \hat{T}(\vec{k}, t) + \frac{1}{\rho c} \hat{\sigma}(\vec{k}, t) \tag{18}$$

qui est en analogue à l'équation 13.

### 3.4.2 Résolution de l'équation différentielle partielle en temps

La résolution de l'équation différentielle partielle du 1e ordre obtenue, conduite en partie 3.3.2, ne dépend pas de la dimension de l'espace. Nous avons pour solution de l'équation 18

$$\hat{T}(\vec{k},t) = \hat{T}(\vec{k},t=0)e^{-D_{th}\vec{k}^2 t} + \frac{1}{\rho c}\int_{t'=0}^{t'=t} dt'\ \hat{\sigma}(\vec{k},t')e^{-D_{th}\vec{k}^2(t-t')} \tag{19}$$

analogue à l'équation 16.

### 3.4.3 Retour dans l'espace réel

Prenons enfin la transformée inverse de 19

$$\begin{aligned}
T(\vec{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\ \hat{T}(\vec{k},t)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{T}(\vec{k},t=0)e^{-D_{th}\vec{k}^2 t} + \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\frac{1}{\rho c}\int_{t'=0}^{t'=t} dt'\ \hat{\sigma}(\vec{k},t')e^{-D_{th}\vec{k}^2(t-t')}\\
&= \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{T}(\vec{k},t=0)e^{-D_{th}\vec{k}^2 t}}_{1} + \frac{1}{\rho c}\int_{t'=0}^{t'=t} dt'\ \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{\sigma}(\vec{k},t')e^{-D_{th}\vec{k}^2(t-t')}}_{2}
\end{aligned}$$

À nouveau, les intégrales 1 et 2 correspondent à des transformées de Fourier inverses de produits de fonctions, nous utiliserons donc à nouveau le corrolaire du théorème de la convolution afin d'écrire pour 1

$$\begin{aligned}
1 =& \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{T}(\vec{k},t=0)e^{-D_{th}\vec{k}^2 t} && \equiv \mathcal{F}^{-1}\{f\cdot g\}\\
=& \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{r}'\left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\hat{T}(\vec{k},t=0)\right)\\
&\times\left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'}e^{-D_{th}\vec{k}^2 t}\right) && \equiv \mathcal{F}^{-1}\{f\} * \mathcal{F}^{-1}\{g\}\\
=& \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{r}' T(\vec{r}-\vec{r}',t=0)\left(\frac{\pi}{D_{th}t}\right)^{d/2} e^{-\vec{r}'^2/4D_{th}t}
\end{aligned}$$

et de même pour 2

$$\begin{aligned}
2 =& \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{\sigma}(\vec{k},t')e^{-D_{th}\vec{k}^2(t-t')} && \equiv \mathcal{F}^{-1}\{f\cdot g\}\\
=& \int_{\mathbb{R}^d}\left(d^d\vec{r}'\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\hat{\sigma}(\vec{k},t')\right)\\
&\times\left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{k}\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'}e^{-D_{th}\vec{k}^2(t-t')}\right) && \equiv \mathcal{F}^{-1}\{f\} * \mathcal{F}^{-1}\{g\}\\
=& \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{r}'\ \sigma(\vec{r}-\vec{r}',t')\left(\frac{\pi}{D_{th}(t-t')}\right)^{d/2} e^{-\vec{r}'^2/4D_{th}(t-t')}
\end{aligned}$$

d'où finalement l'expression suivante pour notre solution de l'EDC

$$\begin{aligned}
T(\vec{r},t) =& \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{r}' T(\vec{r}-\vec{r}',t=0)\left(\frac{\pi}{D_{th}t}\right)^{d/2} e^{-\vec{r}'^2/4D_{th}t}\\
&+\frac{1}{\rho c}\int_{t'=0}^{t'=t} dt'\int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{r}'\ \sigma(\vec{r}-\vec{r}',t')\left(\frac{\pi}{D_{th}(t-t')}\right)^{d/2} e^{-\vec{r}'^2/4D_{th}(t-t')}
\end{aligned} \tag{20}$$